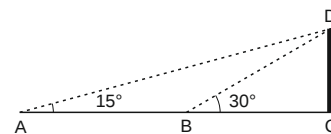


ALLENAMENTO ON-LINE - GARA DI MATEMATICA A SQUADRE (03/11/2025)
SOLUZIONI

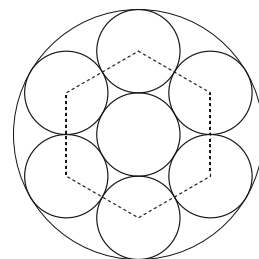
1. QUESTIONE DI PUNTI DI VISTA [5]

Detto C il piede e D la cima del palo, osserviamo che il triangolo ABD è isoscele con $AB = BD$ e BDC è mezzo triangolo equilatero, con $DC = \frac{1}{2} BD$. Il palo DC è alto 5 m.



2. CERCHI TANGENTI [3]

La situazione descritta dal problema è quella di 7 circonferenza uguali, come rappresentato in figura. $\frac{r}{r'} = \frac{3r'}{r'} = 3$.



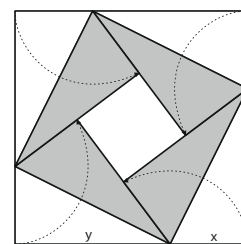
3. PIEGARE IL QUADRATO [8]

Se l è il lato del quadrato, allora il quadrato interno ha lato $\frac{1}{4}l$.

Accade che $x + y = l$, e, osservando il lato del quadrato interno e come avviene la piega, $y - x = \frac{1}{4}l$. Sommando le due equazioni si ottiene $y = \frac{5}{8}l$ e di conseguenza $x = \frac{3}{8}l$.

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{5}{8}l}{\frac{3}{8}l} = \frac{5}{3}.$$

La risposta richiesta è $5 + 3 = 8$.

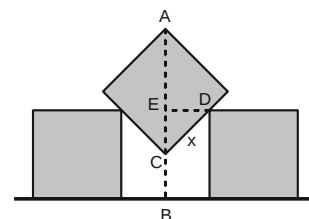


4. UN QUADRATO SOLLEVATO [1914]

Sia $CD = x$, $ED = EC = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Possiamo determinare x , visto che $2ED = \frac{2x}{\sqrt{2}} = 1$ e quindi

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ora $CB = 1 - CB = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ e di conseguenza

$$AB = AC + CB = \sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{2} \text{ m} \cong 1914,2 \text{ mm}.$$



5. PARTE DI UN QUADRATO [666]

Prima soluzione

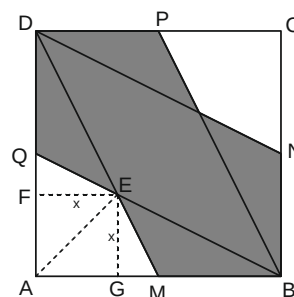
Sia l il lato del quadrato. Detto E il punto di intersezione tra DM e QB e siano F e G le perpendicolari ai lati mandate da E . Per costruzione $EF = EG = x$.

I triangoli AMD e GME sono simili, quindi $AD : EG = AM : GM$ e quindi

$$l : x = \frac{l}{2} : \frac{l}{2} - x \text{ da cui otteniamo } x = \frac{l}{3}.$$

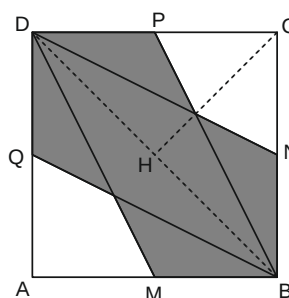
L'area cercata la possiamo ottenere per differenza:

$$A_{\text{Grigia}} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{AEM} = l^2 - 4 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}l^2 = \frac{2}{3} \cdot 1000 \text{ cm}^2 \cong 666,66 \text{ cm}^2.$$



Seconda soluzione

Osserviamo il triangolo DBC . Siccome BP e DN sono mediane, il loro punto di intersezione è il baricentro del triangolo DBC . Questo implica anche che l'area della parte grigia del triangolo è $\frac{2}{3}$ della sua area, così come per il quadrato.



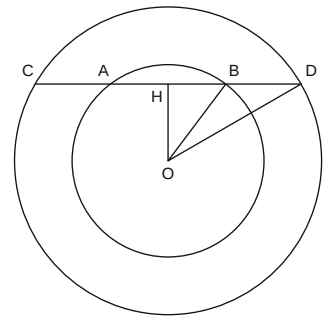
$$A_{\text{Grigia}} = \frac{2}{3} A_{ABCD} = \frac{2}{3} \cdot 1000 \text{ cm}^2 \cong 666,66 \text{ cm}^2.$$

6. NEI CERCHI [1385]

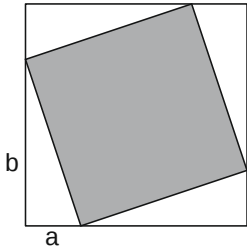
Riferendoci alla figura a fianco abbiamo:

$$OH = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ m}; HD = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ m};$$

$$CD = 2HD = 8\sqrt{3} \text{ m} \cong 1385,6 \text{ cm}.$$



7. QUADRATI [267]



Siano a e b le due parti in cui è diviso il lato del quadrato più grande.

Sappiamo che $(a+b)^2 = 9 \text{ m}^2$, cioè $a+b=3 \text{ m}$ e che $\frac{ab}{2} = \frac{9-6}{4} \text{ m}^2$, cioè $ab = \frac{3}{2} \text{ m}^2$.

Sfruttando le equazioni di secondo grado risolviamo $x^2 - 3x + \frac{3}{2} = 0$ le cui soluzioni sono

$$\text{proprio } a \text{ e } b: a, b = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Il rapporto cercato vale } \frac{a}{b} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}$$

La risposta richiesta è $1000(2-\sqrt{3}) \cong 267,9$.

8. CHIAROSCURO [1582]

Chiamate le aree come in figura si osserva che:

$$Z + D + Y = A + X + B + C + K \text{ e che } X + D + K = A + Z + B + Y + C.$$

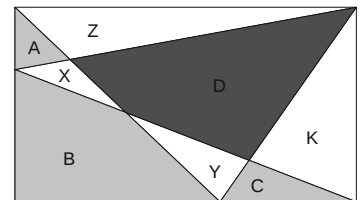
Ricaviamo la parte grigio chiaro dalle due equazioni:

$$A + B + C = Z + D + Y - X - K$$

$$A + B + C = X + D + K - Z - Y$$

Sommiamo le due equazioni:

$$2(A + B + C) = 2D, \text{ quindi } A + B + C = D = 1582 \text{ cm}^2$$



9. UN ESAGONO IN PARTI [765]

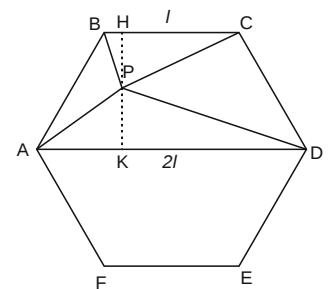
Tracciate le altezze uscenti da P , siano H e K rispettivamente i punti sui segmenti BC e AD . Detta $PH = x$, dalle informazioni del problema abbiamo:

$$\frac{l x}{2} = 80 \text{ cm}^2 \text{ e } 2l \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} - x \right) \frac{1}{2} = 95 \text{ cm}^2.$$

Quest'ultima equazioni possiamo scriverla $\frac{l^2\sqrt{3}}{2} - lx = 95 \text{ cm}^2$ e quindi

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{2} = 160 + 95 = 255 \text{ cm}^2.$$

$$\text{L'area dell'esagono misura: } A_{ABCDEF} = 6 \cdot l \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot 255 = 765 \text{ cm}^2.$$



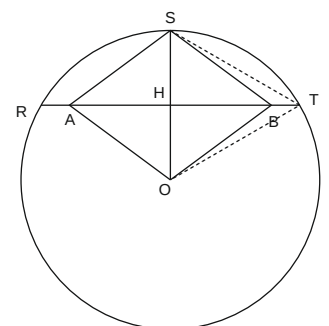
10. PUNTI IN CERCHIO [64]

Sia r il raggio della circonferenza. Dalla relazione $OA = AS = SB = BO$ scopriamo che il

quadrilatero $ASBO$ è un rombo e quindi $SH \perp RT$ e $SH = \frac{1}{2} OS = \frac{1}{2} r$.

Il triangolo SOT è equilatero di lato r . Abbiamo cioè $\frac{r}{2} \sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ e quindi $r = 48 \text{ m}$.

Per il Teorema di Pitagora $AB = 2BH = 2\sqrt{OB^2 - OH^2} = 2\sqrt{40^2 - 24^2} = 2 \cdot 32 = 64 \text{ m}$.

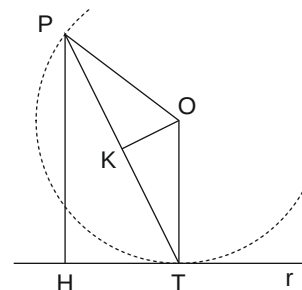


11. PUNTO-RETТА-CERCHIO [169]

Il centro O della circonferenza tangente in T a r e passante per P si trova sulla perpendicolare a r mandata da T e sulla perpendicolare a PT mandata dal suo punto medio.

I triangoli PHT e TKO sono simili: $PH:KT = PT:OT$

$$288:156 = 312:x, \quad x = \frac{156 \cdot 312}{288} = 169 \text{ cm}.$$



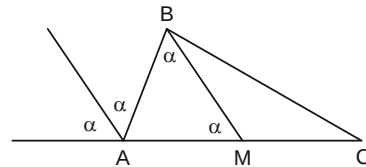
12. PARALLELO [223]

Siccome la bisettrice dell'angolo esterno è parallela a BM , gli angoli $\hat{A}BM = \hat{A}MB$ e

$$\text{quindi } AM = AB = \frac{1}{2} AC = 15 \text{ m}.$$

Per la formula della mediana abbiamo:

$$BM = \frac{1}{2} \sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 15^2 + 2 \cdot 35^2 - 30^2} = 10\sqrt{5} \text{ m} = 223,61 \text{ dm}.$$



13. DOVE SI INCONTRANO LE DIAGONALI [1732]

$$\frac{BE}{ED} = \frac{A_{ABC}}{A_{ADC}} \text{ in quanto i due triangoli hanno la stessa base } AC \text{ ed altezze}$$

proporzionali ai segmenti BE ed ED .

Sia, per comodità, $AC = x$. Dai dati del problema si ha $x^2 = 15^2 + 18^2 = 549$.

Determiniamo, con la formula di Erone, le aree dei due triangoli:

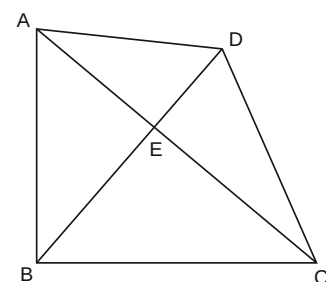
$$A_{ABC} = \sqrt{\frac{33+x}{2} \left(\frac{33+x}{2} - x \right) \left(\frac{33+x}{2} - 15 \right) \left(\frac{33+x}{2} - 18 \right)} = \frac{1}{4} \sqrt{(33^2 - x^2)(x^2 - 9)} = 135 \text{ cm}^2$$

$$A_{ABD} = \sqrt{\frac{27+x}{2} \left(\frac{27+x}{2} - x \right) \left(\frac{27+x}{2} - 15 \right) \left(\frac{27+x}{2} - 12 \right)} = \frac{1}{4} \sqrt{(27^2 - x^2)(x^2 - 9)} = 45\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Il rapporto richiesto è:

$$\frac{BE}{ED} = \frac{A_{ABC}}{A_{ADC}} = \frac{135}{45\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

La soluzione richiesta è $1000\sqrt{3} \approx 1732$.



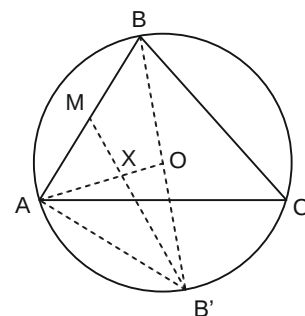
14. TRIANGOLO NEL CERCHIO [3130]

Per il triangolo ABB' , X è il baricentro in quanto sia BM che AO sono mediane.

Ma AO è anche il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo ABC .

$$\text{Quindi } AX = \frac{2}{3} AO = \frac{2}{3} \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{4 \cdot \sqrt{12 \cdot (12-7)(12-8)(12-9)}} = \frac{2}{3} \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{4 \cdot 12\sqrt{5}} = \frac{7}{5} \sqrt{5} \text{ cm}.$$

$$\text{La risposta richiesta è } 1000 \frac{7}{5} \sqrt{5} \approx 3130,54.$$



15. TAGLIO DEL TRIANGOLO [1349]

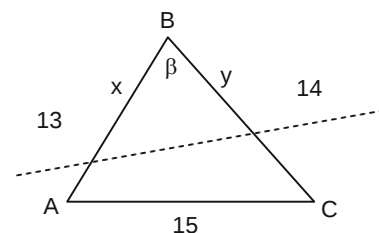
Scegliamo di tracciare la retta in modo da formare il triangolo con l'angolo più grande dei tre. Siano x e y le parti dei due lati ottenute.

Per la condizione del problema deve essere che $x+y=13-x+14-y+15$, cioè $x+y=21$.

L'area del triangolo ABC , sfruttando Erone misura 84 cm^2 e quindi, per la formula

$$\text{dell'area generalizzata di un triangolo possiamo scrivere } \frac{13 \cdot 14 \cdot \sin \beta}{2} = 84 \text{ da cui ricaviamo } \sin \beta = \frac{12}{13}.$$

$$\text{Ora vogliamo che sia massima } A_T = \frac{x \cdot y \cdot \sin \beta}{2} = \frac{x \cdot y \cdot \frac{12}{21}}{2} = \frac{6}{13} xy = \frac{6}{13} x(21-x) = \frac{6}{13} (21x - x^2).$$



Nella parentesi è rimasto un polinomio di secondo grado, una parabola con la concavità rivolta verso il basso, che ha il suo massimo nel vertice, cioè in $x = \frac{21}{2}$.

Il massimo è quindi $A_T = \frac{6}{13} \frac{441}{4} = \frac{1323}{26} \text{ cm}^2$.

La soluzione richiesta è $1323 + 26 = 1349$

16. ANGOLI UGUALI [2236]

La chiave fondamentale per risolvere il problema è riconoscere nei punti P e Q le intersezioni del segmento AM con le circonferenze di centri A e C . Infatti la corda DB ha angolo al centro 90° e di conseguenza angoli alla circonferenza di 45° e 135° .

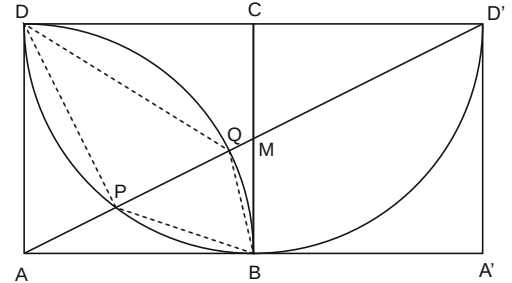
Se il quadrato ha lato l , allora $AQ = l$.

Rimane da calcolare AP . Creando il quadrato $BA'D'C$, simmetrico di $ABCD$ rispetto al lato BC , si osserva che AP è la proiezione del cateto AD sull'ipotenusa AD' per il triangolo ADD' .

Per il Primo Teorema di Euclide, abbiamo $AP : AD = AD : AD'$ e quindi

$$AP = \frac{AD^2}{AD'} = \frac{l^2}{\sqrt{(2l)^2 + l^2}} = \frac{l}{\sqrt{5}}.$$

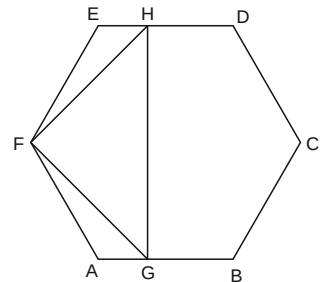
Il rapporto cercato è $1000 \frac{AQ}{AP} = 1000 \frac{l}{\frac{l}{\sqrt{5}}} = 1000\sqrt{5} \cong 2236,1$.



17. ESAGONO 1 [300]

Il triangolo GFH è un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa $20\sqrt{3} \text{ cm}$.

La sua Area è $\frac{(20\sqrt{3})^2}{4} = 300 \text{ cm}^2$.



18. ESAGONO 2 [61]

I possibili punti X sono i punti di intersezione delle circonferenze di diametro BC (e centro N) e AE (con centro in M).

Siccome $ABCE$ è un deltoide, X_1 è il punto di intersezione tra EB e AC (tra loro perpendicolari) e quindi detto l

il lato dell'esagono, $BX_1 = \frac{l}{2}$ e $OX_1 = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}$.

Osserviamo prima di tutto che il quadrilatero $MONX_1$ è un parallelogramma, in quanto $MO = NX_1$ e $MO \parallel NX_1$.

Siccome $\hat{MX}_1N = 30^\circ + 90^\circ + 30^\circ = 150^\circ$, anche $\hat{MON} = 150^\circ$ e di conseguenza anche $\hat{MX}_2N = 150$ visto che MX_2NX_1 è un deltoide ($NX_1 = NX_2$ e $MX_1 = MX_2$)

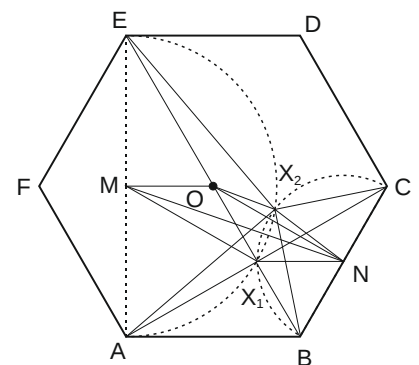
Il quadrilatero MOX_2N risulta ciclico, possiamo applicare il Teorema di Tolomeo:

$MO \cdot X_2N + MN \cdot OX_2 = MX_2 \cdot ON$ che con le informazioni che abbiamo diventa:

$$\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} + MN \cdot OX_2 = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Possiamo determinare la misura di MN sfruttando il Teorema di Pitagora:

$$MN = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{3}}{2} + \frac{l\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(l + \frac{l}{4}\right)^2} = \frac{l\sqrt{7}}{2}.$$



$$\text{E quindi } OX_2 = \frac{\frac{3}{4}l^2 - \frac{1}{4}l^2}{\frac{l\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{7}l$$

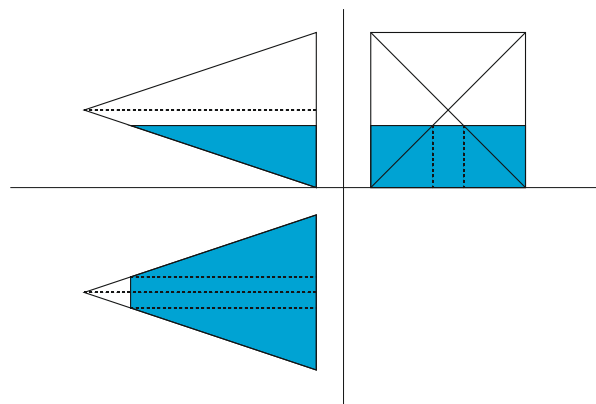
La soluzione richiesta è $OX_1 + OX_2 = 35 + 10\sqrt{7} \cong 61,457$.

19. LA PRIRAMIDE DISTESA [176]

Rappresentando la situazione in proiezioni ortogonali, come in figura, ci rendiamo conto della forma del solido formato dal liquido, solido che possiamo scomporre in due piramidi a base quadrata ed un prisma a base triangolare.

Con una proporzione sul piano verticale possiamo calcolare il cateto maggiore del triangolo azzurro: che è anche l'altezza della piramide a base quadrata: $15:5 = x:4$ da cui otteniamo $x = 12$ cm.

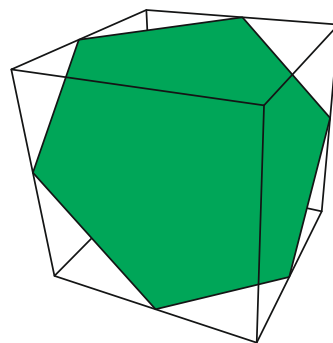
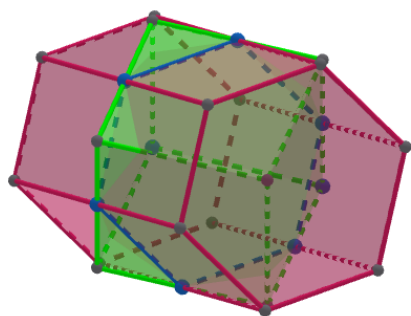
$$V = V_{PRISMA} + 2V_{PIRAMIDE} = \frac{12 \cdot 4}{2} \cdot (10 - 8) + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 12 = 48 + 128 = 176 \text{ cm}^3.$$



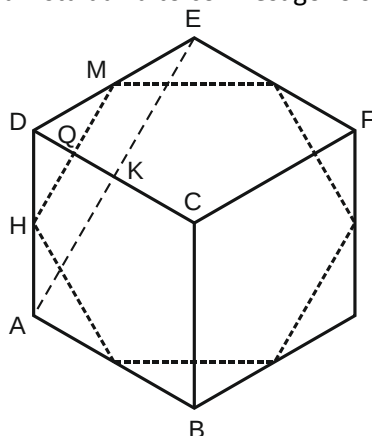
20. UN CUBO E UN PRISMA [1620]

La situazione è complicata da vedere. L'esagono si ottiene unendo i punti medi di 6 lati, come in figura.

L'intersezione del prisma infinito con il cubo genera una situazione come in figura:



Degli 8 vertici del cubo, solo 2 sono completamente inglobati dal prisma. Gli altri 6 formano delle piramidi rette. Rappresentiamo la situazione proiettando la vista dall'alto con l'esagono sul piano del foglio:



Ragioniamo sulle facce $ABCD$ e $CDEF$ del cubo che formano la piramide retta $DMHQ$.

Si osserva subito, per la natura dell'esagono sezione che $DM = DH = \frac{1}{2}AB$.

Tracciando (sulla proiezione) il segmento AE che intercetta il punto Q su DC osserviamo che $DK = \frac{1}{2}AB$ e

$$DQ = \frac{1}{2}DK.$$

$$V = 12^3 - 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot 3 = 1620 \text{ cm}^3.$$